

1006. Из тачке $A(-5,0)$ конструисана је на круг $x^2 + y^2 = 5$ тангента, која је у исто време тангента параболе $y^2 = 2px$. Наћи површину троугла чија су темена тачке додир и жижа параболе.

Решење

Нека је тангента $t: y = kx + n$

Тачка A припада тангенти па је

$$0 = -5k + n \Leftrightarrow n = 5k$$

Заменом у услову $r^2(1 + k^2) = n^2$ да је права тангента круга добија се

$$5(1 + k^2) = (5k)^2$$

Решавањем једначине добија се да је $k_1 = \frac{1}{2}$ или $k_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow n_1 = \frac{5}{2}$ или $n_2 = -\frac{5}{2}$

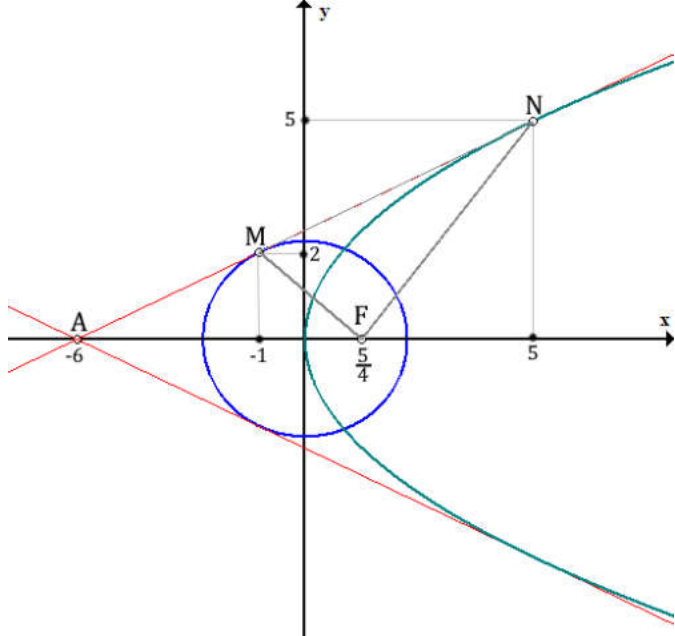
Тангенте су $t_1: y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ или $t_2: y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

Параметар p параболе се одређује из услова $p = 2kn$ додир тангенте и параболе

$$p = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Једначина параболе је $y = 5x$

Жижа је тачка $F\left(\frac{5}{4}, 0\right)$



Због симетрије довољно је одабрати једну тангенту

Решавањем система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$ добија се тачка $N(-1, 2)$

Решавањем система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ y = 5x \end{cases}$ добија се тачка $N(5, 5)$

Применом образаца за P троугла чија су темена тачке MFN добија се $P_{\triangle MFN} = \frac{75}{4}$

1007. Наћи једначине заједничких тангенти елипсе $3x^2 + 4y^2 = 12$ и параболе $y^2 = 4x$ и одредити координате додирних тачака тангенти са елипсом и параболом.

Решење

$$\mathcal{E}: 3x^2 + 4y^2 = 12 / : 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 3$$

$$\mathcal{P}: y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$$

$$t: y = kx + n$$

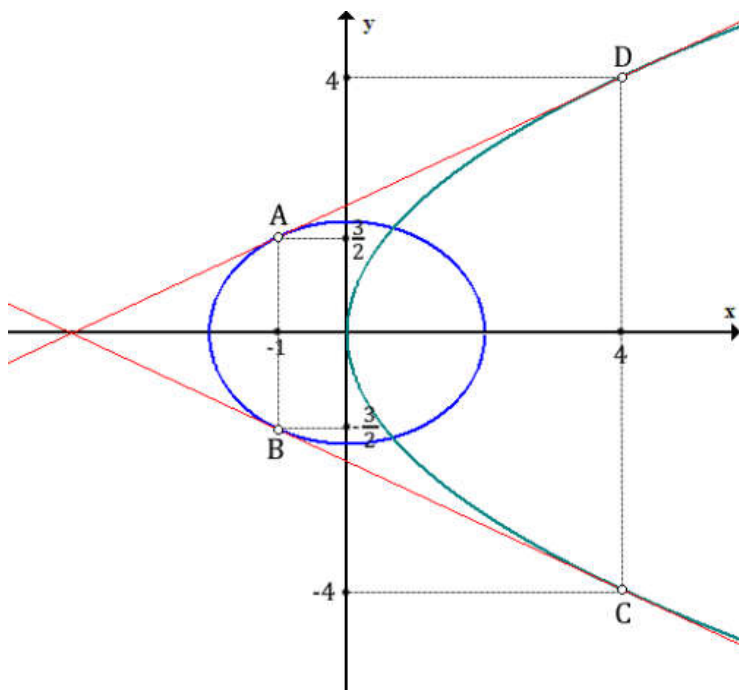
Решавањем система на основу додира тангенте и кривих $\begin{cases} a^2k^2 + b^2 = n^2 \\ p = 2kn \end{cases}$

$$\text{Добија се систем } \begin{cases} 4k^2 + 3 = n^2 \\ 2 = 2kn \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{k} \\ 4k^2 + 3 = \frac{1}{k^2} \end{cases}$$

Друга једначина је биквадратна и њена решења су

$$k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow n_1 = 2, n_2 = -2$$

Једначине тангенти су $t_1: y = \frac{1}{2}x + 2$, $t_2: y = -\frac{1}{2}x - 2$



Додирне тачке се добијају решавањем система

$$A\left(-1, \frac{3}{2}\right): \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases} ; \quad B\left(-1, -\frac{3}{2}\right): \begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 12 \\ y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases}$$

$$C(4, -4): \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = -\frac{1}{2}x - 2 \end{cases} ; \quad D(4, 4): \begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$

1008. Дата је хипербола $3x^2 - y^2 = 12$ и парабола $y^2 = 16x$.

а) Одредити једначине њихових заједничких тангенти.

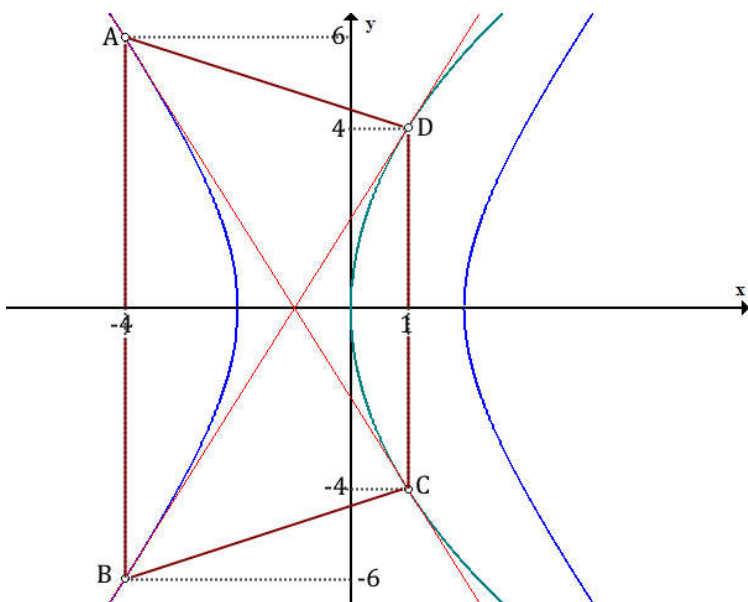
Решење

$$3x^2 - y^2 = 12 / : 12 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 12$$

$$y^2 = 16x \Rightarrow p = 8$$

$$\begin{cases} a^2 k^2 - b^2 = n^2 \\ p = 2kn \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k^2 - 12 = n^2 \\ 8 = 2kn \end{cases} \Leftrightarrow k_1 = 2, k_2 = -2 \Rightarrow n_1 = 2, n_2 = -2$$

$$\Rightarrow t_1: y = 2x + 2, t_2: y = -2x - 2$$



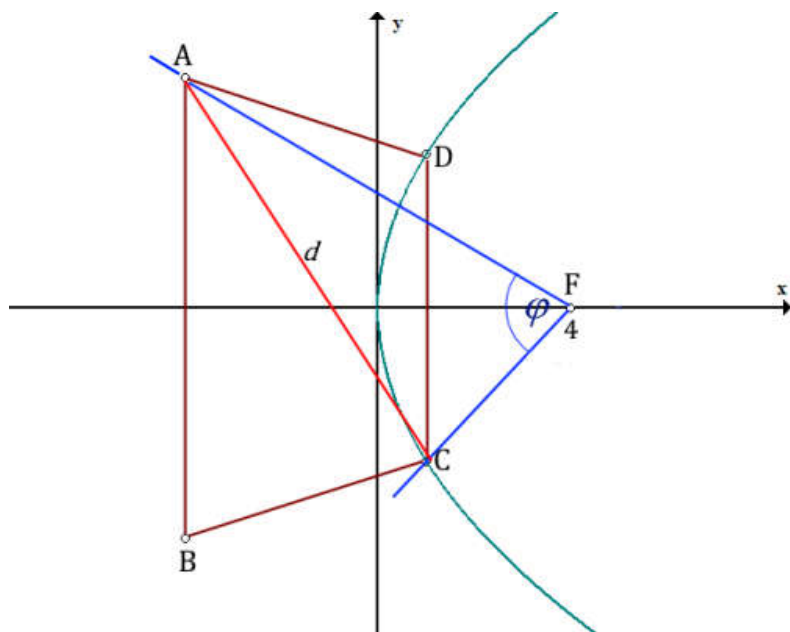
$$A(-4, 6): \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 12 \\ y = -2x - 2 \end{cases} ; \quad B(-4, -6): \begin{cases} 3x^2 - y^2 = 12 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

$$C(1, -4): \begin{cases} y^2 = 16x \\ y = -2x - 2 \end{cases} ; \quad D(1, 4): \begin{cases} y^2 = 16x \\ y = 2x + 2 \end{cases}$$

б) Израчунати површину трапеза чија су темена тачке додира тангенти са хиперболом и параболом.

$$AB = 12, CD = 8, h = 5 \Rightarrow P_{ABCD} = \frac{12 + 8}{2} \cdot 5 = 50$$

в) Одредити угао под којим се из жиже параболе виде дијагонале трапеца.



Жижа параболе F је

$$p = 8 \Rightarrow F(4,0)$$

Коефицијенти праваца правих FA и FC су

$$k_{FA} = \frac{6 - 0}{-4 - 4} = -\frac{3}{4}$$

$$k_{FC} = \frac{-4 - 0}{1 - 4} = \frac{4}{3}$$

$$k_{FA} \cdot k_{FC} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = -1 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$